PART4　$180^\circ-\theta$ の三角比，単位円と三角比の相互関係

例題

(1)　次の三角比を，鋭角の三角比で表せ。

(i)　$\sin 140^\circ$　　(ii)　$\cos 155^\circ$　　(iii)　$\tan 160^\circ$

(2)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。次の問いに答えよ。

(i)　$\sin\theta=\dfrac{2}{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(ii)　$\cos\theta=\dfrac{12}{13}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(iii)　$\tan\theta=\sqrt{2}$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　次の三角比を，鋭角の三角比で表せ。

(i)　$\sin 168^\circ$　　(ii)　$\cos 174^\circ$　　(iii)　$\tan 142^\circ$

(2)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の問いに答えよ。

(i)　$\sin\theta = \dfrac{3\sqrt{5}}{7}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(ii)　$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(iii)　$\tan\theta = -\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。

第10講　PART4　確認問題

1　次の三角比を，鋭角の三角比で表せ。

$\sin 177^\circ = \sin$ ア $^\circ$

2　次の三角比を，鋭角の三角比で表せ。

$\cos 146^\circ = -\cos$ イウ $^\circ$

3　次の三角比を，鋭角の三角比で表せ。

$\tan 138^\circ = -\tan$ エオ $^\circ$

4　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\sin\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

$\cos\theta =$ カ ，$\tan\theta =$ キ

カ の選択肢

① $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　② $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

③ $\dfrac{2}{3}$　④ $\dfrac{2}{3}$，$-\dfrac{2}{3}$

キ の選択肢

① $\dfrac{1}{2}$　② $\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{2}$

③ $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$　④ $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$，$-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

5 $0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。$\cos\theta = \dfrac{3}{4}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

$\sin\theta =$ [ク]，$\tan\theta =$ [ケ]

[ク] の選択肢

① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{1}{4}$, $-\dfrac{1}{4}$

③ $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$　④ $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$, $-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

[ケ] の選択肢

① $\dfrac{1}{3}$　② $\dfrac{1}{3}$, $-\dfrac{1}{3}$

③ $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$　④ $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$, $-\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

6 $0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。$\tan\theta = 2$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。

$\cos\theta =$ [コ]，$\sin\theta =$ [サ]

[コ] の選択肢

① $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　② $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

③ $\dfrac{3}{4}$　④ $\dfrac{3}{4}$, $-\dfrac{3}{4}$

[サ] の選択肢

① $\dfrac{2}{3}$　② $\dfrac{2}{3}$, $-\dfrac{2}{3}$

③ $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$　④ $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

[MEMO]

PART4　180°－θ の三角比，単位円と三角比の相互関係

例題

(1)　次の三角比を，鋭角の三角比で表せ。

(i)　$\sin 140^\circ$　　(ii)　$\cos 155^\circ$　　(iii)　$\tan 160^\circ$

(2)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。次の問いに答えよ。

(i)　$\sin\theta=\dfrac{2}{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(ii)　$\cos\theta=\dfrac{12}{13}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(iii)　$\tan\theta=\sqrt{2}$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。

(1)(i)　$\sin 140^\circ=\sin(180^\circ-40^\circ)=\sin 40^\circ$

(ii)　$\cos 155^\circ=\cos(180^\circ-25^\circ)=-\cos 25^\circ$

(iii)　$\tan 160^\circ=\tan(180^\circ-20^\circ)=-\tan 20^\circ$

(2)(i)　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^2=1-\dfrac{4}{25}=\dfrac{21}{25}$

$0^\circ<\theta<90^\circ$ のとき，$\cos\theta>0$ であるから

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{21}}{5},\quad \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2}{5}\div\frac{\sqrt{21}}{5}=\frac{2}{5}\times\frac{5}{\sqrt{21}}=\frac{2}{\sqrt{21}}$$

$90^\circ<\theta<180^\circ$ のとき，$\cos\theta<0$ であるから

$$\cos\theta=-\frac{\sqrt{21}}{5},\quad \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2}{5}\div\left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right)=\frac{2}{5}\times\left(-\frac{5}{\sqrt{21}}\right)=-\frac{2}{\sqrt{21}}$$

(ii)　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\dfrac{12}{13}\right)^2=1-\dfrac{144}{169}=\dfrac{25}{169}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より，$\sin\theta\geqq0$ であるから $\sin\theta=\dfrac{5}{13}$

また $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{5}{13}\div\dfrac{12}{13}=\dfrac{5}{13}\times\dfrac{13}{12}=\dfrac{5}{12}$

(iii)　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より $\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+(\sqrt{2})^2=3$　　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{3}$

$\tan\theta=\sqrt{2}>0$ より，$0^\circ<\theta<90^\circ$ であるから $\cos\theta>0$　　よって $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

また $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\sqrt{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

練習

(1)　次の三角比を，鋭角の三角比で表せ。

(i)　$\sin 168^\circ$　　(ii)　$\cos 174^\circ$　　(iii)　$\tan 142^\circ$

(2)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の問いに答えよ。

(i)　$\sin\theta = \dfrac{3\sqrt{5}}{7}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(ii)　$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(iii)　$\tan\theta = -\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。

(1)(i)　$\sin 168^\circ = \sin(180^\circ - 12^\circ) = \sin 12^\circ$

(ii)　$\cos 174^\circ = \cos(180^\circ - 6^\circ) = -\cos 6^\circ$

(iii)　$\tan 142^\circ = \tan(180^\circ - 38^\circ) = -\tan 38^\circ$

(2)(i)　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\dfrac{3\sqrt{5}}{7}\right)^2 = 1 - \dfrac{45}{49} = \dfrac{4}{49}$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ のとき，$\cos\theta > 0$ であるから

$$\cos\theta = \frac{2}{7},\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3\sqrt{5}}{7} \div \frac{2}{7} = \frac{3\sqrt{5}}{7} \times \frac{7}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき，$\cos\theta < 0$ であるから

$$\cos\theta = -\frac{2}{7},\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3\sqrt{5}}{7} \div \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{3\sqrt{5}}{7} \times \left(-\frac{7}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

(ii)　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$\sin\theta \geqq 0$ であるから $\sin\theta = \sqrt{\dfrac{5}{6}} = \dfrac{\sqrt{30}}{6}$

また $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\sqrt{30}}{6} \div \dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{30}}{6} \times \sqrt{6} = \sqrt{5}$

(iii)　$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より $\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{10}{9}$　　$\cos^2\theta = \dfrac{9}{10}$

$\tan\theta = -\dfrac{1}{3} < 0$ より，$90^\circ < \theta < 180^\circ$ であるから $\cos\theta < 0$　　よって $\cos\theta = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

また $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より　$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = -\dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

第10講　PART4　確認問題 解答

1

[正解] ア：3

[解説]

$\sin 177^\circ = \sin(180^\circ - 3^\circ)$ [A]

$= \mathbf{\sin 3^\circ}$

[A]　$180^\circ - \theta$ の三角比
$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$

2

[正解] イウ：34

[解説]

$\cos 146^\circ = \cos(180^\circ - 34^\circ)$ [B]

$= \mathbf{-\cos 34^\circ}$

[B]　$180^\circ - \theta$ の三角比
$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$

3

[正解] エオ：42

[解説]

$\tan 138^\circ = \tan(180^\circ - 42^\circ)$ [C]

$= \mathbf{-\tan 42^\circ}$

[C]　$180^\circ - \theta$ の三角比
$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$

4 [正解] カ：②，キ：④

[解説]

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より [D]

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$$

$0°<\theta<90°$ のとき，$\cos\theta>0$ であるから [E]

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{8}{9}}=\mathbf{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{3}\div\frac{2\sqrt{2}}{3}$$ [D]

$$=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2\sqrt{2}}=\mathbf{\frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

$90°<\theta<180°$ のとき，$\cos\theta<0$ であるから [E]

$$\cos\theta=-\sqrt{\frac{8}{9}}=\mathbf{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{3}\div\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$ [D]

$$=\frac{1}{3}\times\left(-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)=\mathbf{-\frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

[D]　三角比の相互関係

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

[E]　$0°<\theta<90°$ のとき

$\cos\theta>0$，$\tan\theta>0$

$90°<\theta<180°$ のとき

$\cos\theta<0$，$\tan\theta<0$

5 [正解] ク：③，ケ：③

[解説]

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より [F]

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{16}$$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ のとき，$\sin\theta\geqq0$ であるから

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{7}}{4}\div\frac{3}{4}$$ [F]

$$=\frac{\sqrt{7}}{4}\times\frac{4}{3}=\frac{\sqrt{\mathbf{7}}}{\mathbf{3}}$$

[F]　三角比の相互関係

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

6 [正解] コ：①，サ：③

[解説]

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より [G]

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+2^2=5$$

$$\cos^2\theta=\frac{1}{5}$$

$\tan\theta>0$ より，$0°<\theta<90°$ であるから $\cos\theta>0$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}}$

また $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より [G]

$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{5}}}$$

[G]　三角比の相互関係

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$